

# Stoßbestimmte Grenzschicht in einem schwach ionisierten Plasma

KARL GERHARD MÜLLER

Institut für Theoretische Physik der Universität Bonn

und PETER WAHLE \*

Institut für Plasmadynamik der Deutschen Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt  
Stuttgart

(Z. Naturforsch. **25 a**, 525—538 [1970]; eingegangen am 3. November 1969)

In this work we develop a collision-dominated sheath model which includes the well known macroscopic models as extreme cases. We set up a description of the charge carriers with the help of the velocity distribution. In order to fulfil the microscopic boundary conditions at the wall we split up the velocity distributions into two parts. A basic set of new transport equations arises which differ from the usual equations by a correction term in the momentum transfer equations. Because of this splitting up of the velocity distribution we are able to take into account exactly specular reflection of the electrons at the wall. In a good approximation our results can also be obtained from the usual equations, if a suitably fitted factor is introduced into the electron boundary condition at the wall.

## 1. Einleitung

Eine Vielzahl von Plasmen wird in geschlossenen Gefäßen erzeugt. Das Plasma kommt mit Wänden oder Elektroden in Berührung. Absorption, Reflexion und Emission von Ladungsträgern an der Wand gewinnen an Bedeutung; es entsteht das Problem der Grenzschicht Plasma – Wand.

Durch den Kontakt eines Plasmas mit einer leitenden oder isolierenden Wand werden die Eigenschaften des Plasmas beeinflusst. Wir wollen diesen Einfluß als *Störung* des Plasmas auffassen. Insbesondere denken wir dabei an die Störung durch eine Sonde, die zu diagnostischen Zwecken in das Plasma eingebracht wird. Hierbei wird die Ausdehnung der Störung durch die Sonde möglichst klein gehalten. Mit wachsendem Abstand von der Sonde nimmt die Störung ab und kann schließlich im Innern eines genügend ausgedehnten Plasmas vernachlässigt werden.

Für unsere Anwendung interessieren wir uns für die Störung der *Dichte* und der *Temperatur* der Ladungsträger, sowie für die Störung der *Quasineutralität*. Diese makroskopischen Effekte sind verbunden mit dem mikroskopischen Effekt der Störung

der Geschwindigkeitsverteilungsfunktion der Ladungsträger. Als *Grenzschicht* bezeichnen wir den gesamten Bereich, in dem eine dieser aufgeführten Plasmaeigenschaften gestört ist. Da die Störung zum Plasma hin im allgemeinen asymptotisch abklingt, können wir für die Grenzschicht keine exakte Ausdehnung, sondern nur eine charakteristische Länge angeben.

Die ursprüngliche Definition der Grenzschicht (sheath) von MOTT-SMITH und LANGMUIR<sup>1</sup> erfaßt ausschließlich den Störbereich der Quasineutralität. ECKER und MCCLURE<sup>2</sup> erweiterten diese Definition durch Einbeziehung der Dichte- und der Temperaturstörung. Solche Störungen treten vor allem bei einer Wand auf, deren Ausdehnung wesentlich größer ist als die freie Weglänge der Ladungsträger.

In unserer Arbeit untersuchen wir die Grenzschicht vor einer Wand in einem schwach ionisierten, stoßbestimmten Plasma. Die Ausdehnung der Wand und die Ausdehnung der Grenzschicht sollen sehr groß sein im Vergleich zur freien Weglänge der Ladungsträger. Dies ist vor allem bei genügend hohem Druck der Fall.

Eine Reihe von Arbeiten liegt zu dieser stoßbestimmten Grenzschicht vor<sup>1–11</sup>. Im allgemeinen

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. K. G. MÜLLER, Institut für Theoretische Physik der Universität Bonn, D-5300 Bonn, Wegelerstraße 10.

\* D 5, Auszug aus der von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät genehmigten Dissertation.

<sup>1</sup> H. M. MOTT-SMITH u. I. LANGMUIR, Phys. Rev. **28**, 727 [1926].

<sup>2</sup> G. ECKER u. J. J. MCCLURE, Ann. Phys. **7**, 69 [1965].

<sup>3</sup> W. SCHOTTKY, Phys. Z. **25**, 635 [1924].

<sup>4</sup> B. DAVYDOV u. L. ZMANOVSKAJA, Techn. Phys. USSR **3**, 715 [1936].

<sup>5</sup> R. L. F. BOYD, Proc. Phys. Soc. London B **64**, 795 [1951].

<sup>6</sup> I. COHEN, Phys. Fluids **6**, 1492 [1963].

<sup>7</sup> C. H. SU u. S. H. LAM, Phys. Fluids **6**, 1479 [1963].

<sup>8</sup> J. F. WAYMOUTH, Phys. Fluids **7**, 1843 [1964].

<sup>9</sup> G. SCHULZ, Z. Phys. **183**, 51 [1965].

<sup>10</sup> E. WASSERSTROM, C. H. SU u. R. F. PROBSTEN, Phys. Fluids **8**, 56 [1965].

<sup>11</sup> Y. S. CHOU, L. TALBOT u. D. R. WILLIS, Phys. Fluids **9**, 2150 [1966].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition “no derivative works”). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

wird die Bewegung der Ladungsträger im stoßbestimmten Bereich der Grenzschicht mit Hilfe der üblichen makroskopischen Transportgleichungen für die Dichte, die mittlere Geschwindigkeit und gegebenenfalls für die Energie beschrieben<sup>1-9</sup>. Hierbei werden folgende wichtige Eigenschaften des Plasmas vorausgesetzt<sup>12</sup>:

schwach ionisiertes Plasma,  
schwache Anisotropie der Geschwindigkeitsverteilung der Ladungsträger,  
schwache Inhomogenität des elektrischen Feldes und der Teilchendichte

und zum Teil

Quasineutralität,  
konstante Elektronentemperatur.

Die Voraussetzung schwacher Anisotropie ist unmittelbar vor einer Wand, die alle Ladungsträger absorbiert bzw. neutralisiert, immer verletzt; auch an der Grenze zu einer stoßfreien Zone, die häufig in der Literatur eingeführt wird<sup>2, 5</sup>, ist diese Voraussetzung zumindest für die im elektrischen Feld auf die Wand zu beschleunigten Ladungsträger falsch; hier sind die Geschwindigkeitsverteilungen der Ladungsträger vollkommen gerichtet und die üblichen makroskopischen Transportgleichungen sind nicht mehr anwendbar. Außerdem liefern die Eigenschaften der Wand keine Randbedingungen für die makroskopischen Transportgleichungen, sondern nur für die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion. An einer vollständig absorbierenden und nicht emittierenden Wand z. B. verschwindet die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion für alle Geschwindigkeiten, die von der Wand weggerichtet sind.

Die vorliegenden makroskopischen Grenzschichtmodelle<sup>1-9</sup> sind nur in bestimmten Parameterbereichen anwendbar, in denen die angeführten Voraussetzungen brauchbare Näherungen darstellen. Die Gültigkeitsbereiche dieser Modelle werden charakterisiert durch die relative Größe der Längenparameter

Debye-Länge der Elektronen  $\lambda_D$ ,  
freie Weglänge der Ladungsträger  $\lambda$ ,  
Diffusionslänge  $\lambda_{\text{Dif}}$ .

Die Diffusionslänge stellt eine charakteristische Länge für den Dichteabfall bei der ambipolaren Diffusion dar und lautet in den Spezialfällen

ebene Geometrie mit Ionisation:

$$\lambda_{\text{Dif}} = \lambda_{\text{Ion}}, \quad (1)$$

kugelsymmetrische Geometrie ohne Ionisation:

$$\lambda_{\text{Dif}} = R. \quad (2)$$

Hierbei bedeuten:

$\lambda_{\text{Ion}} = \sqrt{D_{\text{am}}/\Delta_{\text{Ion}}}$  die Ionisierungslänge,  
 $R$  den Radius der kugelförmigen Wand,  
 $\Delta_{\text{Ion}}$  die Ionisationsrate,  
 $D_{\text{am}} = (b_e D_i + b_i D_e) / (b_e + b_i)$  den ambipolaren Diffusionskoeffizienten,  
 $b_e, b_i$  die Beweglichkeiten und  
 $D_e, D_i$  die Diffusionskoeffizienten der Ladungsträger.

Die Indizes e, i kennzeichnen Elektronen und Ionen.

Im Modell „Fall hoher Trägerdichte“

$$\lambda_D < \lambda \ll \lambda_{\text{Dif}} \quad (3)$$

werden unter Annahme von Quasineutralität die Transportgleichungen vom Plasma her zur Wand verwendet bis zu der Stelle, an der der makroskopische Ionenstrom  $\Gamma_i$  gleich wird dem thermischen Sättigungsstrom:

$$\Gamma_i = \alpha_i n \frac{v_{i\text{th}}}{4} = \alpha_i n \sqrt{\frac{k T_i}{2 \pi m_i}}. \quad (4)$$

Es bedeuten

$$n = n_i = n_e \quad (5)$$

die Dichte,

$v_{\text{th}} = \sqrt{8 k T / \pi m}$  die thermische Geschwindigkeit,  
 $T$  die Temperatur,  
 $m$  die Masse.

Zur Wand hin schließt sich dann an eine stoßfreie Raumladungszone vernachlässigbarer Ausdehnung, über der der thermische Elektronenstrom gleich wird dem zur Wand fließenden Elektronenstrom:

$$\Gamma_e = \alpha_e n \frac{v_{e\text{th}}}{4} \exp \left\{ \frac{e \Delta U}{k T_e} \right\} = \alpha_e n \sqrt{\frac{k T_e}{2 \pi m_e}} \exp \left\{ \frac{e \Delta U}{k T_e} \right\}. \quad (6)$$

Damit Gln. (4) und (6) gleichzeitig erfüllt werden können, ist eine Spannung  $\Delta U$  über der Raumladungszone erforderlich, durch die die Elektronendichte verkleinert wird. Gln. (4) und (6) gelten für eine negative Spannung der Wand gegenüber dem Plasma. Der Koeffizient  $\alpha$  beschreibt Abweichungen von der Maxwell-Verteilung der Ladungsträger. Für eine volle Maxwell-Verteilung gilt

$$\alpha = 1, \quad (7)$$

<sup>12</sup> P. WAHLE u. K. G. MÜLLER, DLR-Forschungsbericht 69-08 [1969] (Herausgeber: ZLDI, München 86, Postfach 880).

für eine halbe, auf die Wand gerichtete Maxwell-Verteilung

$$\alpha = 2. \quad (8)$$

Im Modell „Kontinuumsfall“

$$\lambda \ll \lambda_D < \lambda_{Dif} \quad (9)$$

bildet sich die Raumladung schon viele Weglängen vor der Wand aus. Die Transportgleichungen können bis unmittelbar vor der Wand verwendet werden. Hier gelten die Randbedingungen

$$n_e = 0, \quad n_i = 0. \quad (10, 11)$$

In einem Parameterdiagramm läßt sich der Gültigkeitsbereich dieser beiden Modelle angeben (siehe Abb. 1). Die Grenzen berechnen sich aus den Beschränkungen für die Transportgleichungen und aus der Definition der beiden Modelle<sup>12</sup>.

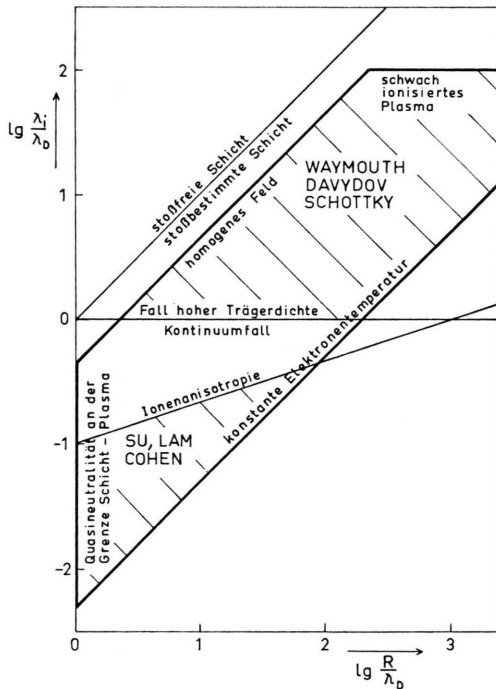


Abb. 1. Gültigkeitsbereich der Grenzschichtmodelle für den kugelsymmetrischen Fall ohne Ionisation. Unser Modell: stark umrandet. Modelle im „Fall hoher Trägerdichte“ und im „Kontinuumsfall“: schraffiert. Parameter:  $T_i/T_e = 0,1$ .

Es ergeben sich also in dem Parameterdiagramm zwei voneinander getrennte Bereiche, in denen die bisherigen Grenzschichtmodelle Gültigkeit haben. Die

Größe der Bereiche ist von der Genauigkeitsforderung abhängig. Hinzu treten jedoch noch die Beschränkungen, die durch die verwendeten makroskopischen Randbedingungen (4), (6) bzw. (10), (11) eingeführt werden. Die Beschränkungen wurden bisher noch nicht untersucht.

Es erheben sich nun zwei Fragen:

1. Wie gut wird eine Grenzschicht im jeweiligen Gültigkeitsbereich von den vorliegenden Modellen beschrieben?

2. Wie kann der Bereich zwischen den Gültigkeitsbereichen erfaßt werden?

Diese Fragen können nur mit Hilfe einer allgemeinen Theorie beantwortet werden, die den „Fall hoher Trägerdichte“ und den „Kontinuumsfall“ als Grenzfälle enthält. Eine solche Theorie muß vor allem den Übergang Isotropie – Anisotropie korrekt beschreiben, so daß die mikroskopische Wandbedingung

$$f_W(v_{||}, v_{\perp}) = \delta f_W(v_{||}, -v_{\perp}) ; \quad v_{\perp} > 0 \quad (12)$$

erfüllt wird. Hierbei bedeuten

- $f_W$  Geschwindigkeitsverteilung an der Wand \*,
- $v_{||}$  Geschwindigkeitskomponente parallel zur Wand,
- $v_{\perp}$  Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand ( $v_{\perp} > 0$  kennzeichnet von der Wand wegfliegende Ladungsträger),
- $\delta$  Reflexionskoeffizient.

Wird die Grenzschicht mit Hilfe der Verteilungsfunktionen der Ladungsträger beschrieben, so läßt sich die Randbedingung unmittelbar erfüllen. Zur Berechnung der Grenzschicht müssen dann jedoch die Boltzmann-Gleichungen für die Ladungsträger und die Poisson-Gleichung simultan gelöst werden.

BERNSTEIN und RABINOWITZ<sup>13</sup> wendeten dieses Verfahren auf die stoßfreie Grenzschicht um eine kugelförmige Sonde an. Sie spalteten die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion auf in zwei Anteile, wodurch die auf die Sonde zufliegenden Teilchen von den von der Sonde wegfliegenden Teilchen unterschieden werden.

WASSERSTROM, SU und PROBSTEIN<sup>10</sup> und CHOU, TALBOT und WILLIS<sup>11</sup> erweiterten dieses Verfahren der Aufspaltung der Verteilungsfunktion unter Berücksichtigung von Stößen. Die beiden Anteile der Geschwindigkeitsverteilung existieren nur in einem bestimmten Winkelbereich, der Betrag der Geschwin-

\* Wir verstehen die Funktionswerte an der Wand mit dem Index W und diejenigen im ungestörten Plasma mit dem Index 0.

<sup>13</sup> I. BERNSTEIN u. I. N. RABINOWITZ, Phys. Fluids **2**, 112 [1959].

digkeiten in diesem Winkelbereich zeigt eine Maxwell-Verteilung. Mit Hilfe dieser Aufspaltung der Geschwindigkeitsverteilungsfunktion lassen sich aus der Boltzmann-Gleichung Transportgleichungen ableiten, die gegenüber den üblichen Transportgleichungen Korrekturterme besitzen. In Anwendung auf eine stoßbestimmte Grenzschicht ( $\lambda \ll R$ ) werden diese Korrekturterme jedoch nur in einem Abstand von der Sonde wirksam, der sehr viel kleiner ist als die freie Weglänge<sup>14</sup>. Dieses Ergebnis läßt sich physikalisch nicht realisieren. Die Rechnungen von WASSERSTROM u. a. und CHOU u. a. liefern also im Bereich der stoßbestimmten Grenzschicht unphysikalische Korrekturterme.

Für die stoßbestimmte Grenzschicht existiert daher noch kein brauchbares Modell, in dem einerseits die mikroskopischen Randbedingungen erfüllt werden, aus dem andererseits die üblichen makroskopischen Transportgleichungen in bestimmten Parameterbereichen als Grenzfälle hervorgehen.

## 2. Gegenstand der Untersuchung

Wir betrachten ein ruhendes, stationäres Plasma aus Elektronen (Index  $e$ ), einfach geladenen Ionen ( $i$ ) und Neutralteilchen ( $n$ ). Der Ionisationsgrad sei so gering, daß Stöße der Ladungsträger untereinander vernachlässigbar sind gegenüber den Stößen der Ladungsträger mit den Neutralteilchen, und daß die Partialdrücke  $p_e$  und  $p_i$  vernachlässigbar sind gegenüber dem Neutralgasdruck  $p_n$ . Wir identifizieren also den gesamten Druck  $p$  mit dem Neutralgasdruck  $p_n$ . Temperatur  $T_n$  sowie Druck  $p_n$  des Neutralgases seien konstant, ebenso die Elektronentemperatur  $T_e$  mit

$$T_e \geq T_i, T_n. \quad (13)$$

Den Einfluß von Magnetfeldern schließen wir aus.

Bei unserer Untersuchung unterscheiden wir die drei verschiedenen Bereiche:

ungestörtes Plasma, Grenzschicht, Wand.

Wir beschränken uns auf Grenzschichten, in denen die Ladungsträger viele Stöße der Neutralteilchen erleiden.

Im ungestörten Plasma verschwindet der Einfluß der Wand auf die Plasmaeigenschaften. Das Plasma ist quasineutral, Elektronen- und Ionendichte stim-

men überein und werden durch Volumenionisation und -rekombination bestimmt. Raumladung und Teilchentransport sind vernachlässigbar.

In der Grenzschicht macht sich der Einfluß der Wand bemerkbar; die Plasmaeigenschaften gehen von den Werten im ungestörten Plasma zu denen an der Wand über. Hiermit ist eine zur Wand zunehmende Diffusion verbunden. Der Einfluß von Volumenionisation und -rekombination verliert an Bedeutung. Durch Ladungstrennung wird ein elektrisches Feld aufgebaut, das die Grenzschicht wesentlich mitbestimmt. Die Wand beeinflusst das Plasma unmittelbar durch Absorption bzw. Neutralisation, Reflexion und Emission der Ladungsträger. Emission schließen wir aus. Im allgemeinen kann die Wand die Funktion einer Elektrode übernehmen und einen elektrischen Strom aufnehmen, der über einen äußeren Stromkreis abgeführt wird.

Bei gegebenen Eigenschaften des Plasmas und der Wand besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem elektrischen Strom und der elektrischen Spannung über der Grenzschicht, die sogenannte Strom-Spannungs-Charakteristik der Grenzschicht. Wir beschränken uns auf den Fall negativer Spannung der Wand gegenüber dem Plasma.

Ist die zur Wand senkrechte Ausdehnung der Grenzschicht klein gegenüber den Wanddimensionen, so kann die Grenzschicht unabhängig von der tatsächlichen Geometrie als ebenes Problem berechnet werden. Anderenfalls geht die Geometrie der Wand in die mathematische Formulierung ein. Im einzelnen untersuchen wir das kugelsymmetrische, das zylindersymmetrische und das ebene Grenzschichtproblem. In diesen Fällen hängen alle Plasmaeigenschaften nur von der Ortskoordinate  $r$  senkrecht zur Wand ab.

## 3. Modell

Die mikroskopische Beschreibung unseres Grenzschichtmodells beruht wie bei den oben beschriebenen mikroskopischen Modellen auf einer Aufspaltung der Geschwindigkeitsverteilungen für Elektronen und Ionen in zwei Anteile<sup>14,15</sup>. Jeder dieser Anteile ist eine Lösung der Boltzmann-Gleichung und beschreibt somit einzeln im Gegensatz zu den eben diskutierten Modellen von WASSERSTROM u. a. und CHOU u. a.

<sup>14</sup> P. WAHLE u. K. G. MÜLLER, DLR Bericht Nr. 902 [1969] (Herausgeber: ZLDI, München 86, Postfach 880).

<sup>15</sup> K. G. MÜLLER u. P. WAHLE, Contributed Paper of the VIII. International Conference on Phenomena in Ionized Gases 1967, Vienna.



das physikalische Verhalten von geladenen Teilchen. Wir beschränken uns von vornherein auf stoßbestimmte Grenzschichten ( $\lambda \ll R$ ). Ein Übergang zur stoßfreien Schicht ( $\lambda \gg R$ ) ist in diesem Modell nicht enthalten.

### 3.1. Ansatz

Wir gehen davon aus, daß im überwiegenden Teil der stoßbestimmten Grenzschicht die Geschwindigkeitsverteilungen der Ladungsträger schwach anisotrop sind und daß dort daher die üblichen makroskopischen Transportgleichungen gültig sind.

Im Bereich einiger mittlerer freier Weglängen vor der Wand werden die Verteilungen auf Grund der Teilchenabsorption an der Wand stark anisotrop. Diesen Übergang von der schwachen zur starken Anisotropie wollen wir durch eine Korrekturverteilung beschreiben.

Wir spalten dazu die gesamte Verteilungsfunktion jeder Ladungsträgerkomponente in zwei Anteile  $f_1$  und  $f_2$  auf.  $f_1$  stellt eine schwach anisotrope Verteilungsfunktion dar, die in der gesamten Grenzschicht bis zur Wand existiert. Sie enthält jedoch nahe der Wand Teilchen, die tatsächlich nicht vorhanden sind, da sie an der Wand absorbiert wurden. Es sind dies Teilchen, die sich in Richtung Wand – Plasma bewegen.

Wir korrigieren diesen Fehler durch Einführung einer Verteilung mit negativer Dichte, die gerade die in  $f_1$  zuviel berücksichtigten Teilchen kompensiert. Unser Ansatz lautet also

$$f = f_1 + f_2 \quad \text{mit} \quad f_2 < 0. \quad (14)$$

Die Teilchen von  $f_1$  können wir mit den üblichen Transportgleichungen korrekt beschreiben. Von der Verteilung  $f_2$  kennen wir den Zusammenhang mit  $f_1$  an der Wand, der durch die mikroskopische Wandbedingung (12) gegeben ist. Diese sagt aus, daß  $f_{2W}$  alle in Richtung Wand – Plasma fliegenden, nicht reflektierten Teilchen kompensieren muß:

$$f_{2W}(v_{\parallel}, v_{\perp}) = -(1 - \delta) f_{1W}(v_{\parallel}, v_{\perp}); \quad v_{\perp} > 0. \quad (15)$$

Mit dieser Darstellung der Wandbedingung können nur die elastisch reflektierten Teilchen erfaßt werden. Bei emittierten oder reemittierten Teilchen mit Wandtemperatur ist der Zusammenhang kompliziert (siehe auch GROSS, JACKSON und ZIERING<sup>16</sup>).

Damit ist an der Wand die Verteilung  $f_{2W}$  auf die Verteilung  $f_{1W}$  zurückgeführt, und wir erhalten für die gesamte Verteilungsfunktion (14)

$$\begin{aligned} f_W &= f_{1W} & v_{\perp} &\leq 0, \\ f_W &= \delta f_{1W} & v_{\perp} &> 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Mit den Gln. (14) und (15) ist jedoch die Aufspaltung von  $f$  noch nicht eindeutig festgelegt; wir können noch eine im Rahmen der Voraussetzung beliebige Verteilung  $f_{1W}$  an der Wand vorgeben. Wir machen daher für unser Modell noch die zusätzliche Annahme, daß  $f_{1W}$  eine isotrope Verteilung darstellt. Die  $f_1$ -Teilchen transportieren also an der Wand keinen Strom:

$$\Gamma_{1W} = 0. \quad (17)$$

$f_{2W}$  ist dann die zugehörige Halbverteilung mit von der Wand weggerichteten Geschwindigkeiten. Für unser numerisches Beispiel verwenden wir eine Maxwell-Verteilung

$$f_{1W} = n_{1W} \left( \frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2kT} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) \right\}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} f_{2W} = & -(1 - \delta) n_{1W} \left( \frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} \\ & \cdot \exp \left\{ -\frac{m}{2kT} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Wir haben hierbei die Wandbedingung (15) verwendet.

Mit dieser Festsetzung (17) erreichen wir, daß bei fehlender Reflexion ( $\delta = 0$ ) die gesamte Verteilung vollständig gerichtet ist und daß bei vollständiger Reflexion ( $\delta = 1$ ) eine isotrope Verteilung vorliegt, so als wäre die Wand nicht vorhanden. Dies liefert ein physikalisch sinnvolles Bild der Vorgänge an der Wand.

Wir wollen jetzt das Verhalten der  $f_2$ -Teilchen auf dem Weg von der Wand ins Plasma verfolgen.

Die Ladungsträger bewegen sich im elektrischen Feld der Schicht in Richtung Wand – Plasma und erleiden Stöße mit den Neutralteilchen. Wir machen nun die realistische Annahme, daß die Ladungsträger nach jedem Stoß eine isotrope Geschwindigkeitsverteilung besitzen und zu den Teilchen der  $f_1$ -Verteilung gerechnet werden können. Dieser Prozeß führt zum Abbau und schließlich zum Verschwinden von  $f_2$ .

### 3.2. Berechnung von $f_2$

Nach unserer Annahme führt jeder Stoß eines  $f_2$ -Teilchens zu einem Verlust für  $f_2$ . Im Stoßglied der

<sup>16</sup> E. P. GROSS, E. A. JACKSON u. S. ZIERING, *Annals of Physics* **1**, 141 [1957].

Boltzmann-Gleichung

$$\frac{df_2}{dt} \equiv \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q\mathbf{E}}{m} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}} = -\nu f_2 \quad (20)$$

tritt damit nur der Verlustterm auf.

Hierbei ist  $q = +e$  für Ionen,  $q = -e$  für Elektronen zu setzen. Unter Verwendung der Bedingung, daß  $f_2$  an der Wand eine Halbverteilung darstellt, erhalten wir die Lösung

$$f_2(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = f_{2W} \left( \sqrt{v^2 + \frac{2q}{m}(U(\mathbf{r}) - U_W)} \right) \exp\{-\int \nu dt\} \quad (21)$$

oder im Falle einer halben Maxwell-Verteilung

$$f_2(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = -2 \frac{1-\delta}{1+\delta} n_W \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \exp\left\{-\frac{m}{2kT} \left[ v^2 + \frac{2q}{m}(U - U_W) \right]\right\} \exp\{-\int \nu dt\}. \quad (22)$$

$n_W$  ist die Teilchendichte an der Wand. Die Integration über die Stoßfrequenz erstreckt sich über die Teilchenbahn von der Wand bis zur Stelle  $r$ . Zur Vereinfachung setzen wir die Zahl der Stöße eines Teilchens auf dem Weg ins Plasma proportional zu seinem senkrechten Abstand von der Wand:

$$\int \nu dt = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_W) \cdot \mathbf{n} / \lambda. \quad (23)$$

$\mathbf{n}$  ist der Normalenvektor in Richtung Wand-Plasma.

Der Term  $\exp(\mathbf{r} - \mathbf{r}_W) \cdot \mathbf{n} / \lambda$  erweist sich als charakteristischer Faktor für den Übergang anisotrop-isotrop durch Stöße in einem Bereich von einigen freien Weglängen vor der Wand. In den Schichtmodellen von WASSERSTROM u. a.<sup>10</sup>, sowie von CHOU u. a.<sup>11</sup> fehlt dieser Faktor.

Bei schwachen elektrischen Feldern kann der Term mit  $(U - U_W)$  im Exponenten vernachlässigt werden. Diese Vernachlässigung werden wir im Falle der Ionen verwenden. Bei hohen elektrischen Feldern dagegen führen die Ionen eine Driftbewegung aus, die proportional zu der Wurzel aus der elektrischen Feldstärke ist und bei der sich praktisch eine gerichtete Geschwindigkeitsverteilung der Ionen auf die Wand zu einstellt. In diesem Falle erübrigt sich die Korrekturverteilung; schon viele freie Weglängen vor der Wand besitzen die Ionen eine gerichtete Verteilung.

Im folgenden setzen wir an der Wand für  $f_1$  eine volle und damit für  $f_2$  eine halbe Maxwell-Verteilung voraus.

### 3.3. Berechnung von $n_2$ und $\Gamma_2$

Aus der Korrekturverteilung  $f_2$  der Gl. (20) lassen sich die Teilchendichten  $n_2$  und die Stromdichten  $\Gamma_2$  berechnen. Mit einer Radialkoordinate  $r$  senkrecht zur Wand finden wir

$$n_2(r) = \int f_2 d^3v = -\frac{1-\delta}{1+\delta} n_W \exp\left\{-\frac{r-r_W}{\lambda}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{e}{kT}(U - U_W)\right\} \left\{1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{e}{kT}}(U - U_W)\right)\right\}, \quad (24)$$

$$\Gamma_2(r) = \int v_{\perp} f_2 d^3v = -\frac{1-\delta}{1+\delta} n_W \frac{v_{th}}{2} \exp\left\{-\frac{r-r_W}{\lambda}\right\}, \quad (25)$$

wobei wir für die Ionen

$$U - U_W = 0 \quad (26)$$

verwenden.  $\Phi$  kennzeichnet die Fehlerfunktion,  $v_{th}$  die thermische Geschwindigkeit (6).

Nach unserer Voraussetzung stellen an der Wand  $f_1$  eine volle,  $f_2$  eine halbe Maxwell-Verteilung dar. Der gesamte Strom an der Wand wird dabei durch  $f_2$  transportiert:

$$\Gamma_W = \Gamma_{2W} \quad (27)$$

oder mit (25)

$$\Gamma_W = -\frac{1-\delta}{1+\delta} n_W \frac{v_{th}}{2}. \quad (28)$$

Diese sich aus unserem Modell ergebende Wandbedingung (28) besitzt die Form der makroskopischen Wandbedingung (4).

### 4. Verallgemeinerte Transportgleichungen

Wir gehen aus von den üblichen Bewegungsgleichungen für die  $f_1$ -Teilchen, wie sie sich für schwach anisotrope Geschwindigkeitsverteilungen als zweite Momentengleichung aus der Boltzmann-Gleichung ergeben. Diese Gleichungen sind wegen der Voraussetzung für die  $f_1$ -Teilchen in der ganzen Schicht anwendbar. Die Bewegungsgleichung der Ionen erweitern wir für die Bewegung in hohen Feldern unter Verwendung einer feldstärkeabhängigen Beweglichkeit (siehe auch FROST<sup>17</sup>). In diesen beiden Bewegungsgleichungen eliminieren wir die Dichten und Stromdichten der  $f_1$ -Teilchen durch die entsprechenden Größen der  $f_2$ -Teilchen und der  $f$ -Teilchen und erhalten nach Normierung \*\*

<sup>17</sup> L. S. FROST, Phys. Rev. **105**, 354 [1957].

\*\* Gleichungen in den normierten Größen kennzeichnen wir durch ein  $n$  neben der Gleichungsnummer.

$$-n_e E - \frac{dn_e}{dr} = T_e - \left( n_{e2} E + \frac{dn_{e2}}{dr} + T_{e2} \right), \quad (29 \text{ n})$$

$$\frac{n_i E}{\sqrt{1+a|E|}} - t \frac{dn_i}{dr} = T_i + \left( \frac{n_{i2} E}{\sqrt{1+a|E|}} - t \frac{dn_{i2}}{dr} - T_{i2} \right). \quad (30 \text{ n})$$

Hinzu treten die beiden Kontinuitätsgleichungen für die Elektronen und Ionen

$$\frac{1}{r^\varepsilon} \frac{d}{dr} r^\varepsilon T_e = \frac{d_e}{l_{\text{Ion}}^2} (A_{\text{Ion}} - A_{\text{Rec}}), \quad (31 \text{ n})$$

$$\frac{1}{r^\varepsilon} \frac{d}{dr} r^\varepsilon T_i = \frac{t d_i}{l_{\text{Ion}}^2} (A_{\text{Ion}} - A_{\text{Rec}}) \quad (32 \text{ n})$$

die Poisson-Gleichung

$$\frac{1}{r^\varepsilon} \frac{d}{dr} r^\varepsilon E = \frac{1}{l_D^2} (n_i - n_e) \quad (33 \text{ n})$$

und der Zusammenhang zwischen dem Potential und der elektrischen Feldstärke

$$dU/dr = -E. \quad (34 \text{ n})$$

Der Parameter  $\varepsilon$  charakterisiert ebene ( $\varepsilon=0$ ), zylindersymmetrische ( $\varepsilon=1$ ) und kugelsymmetrische ( $\varepsilon=2$ ) Geometrie. Zur Normierung haben wir die charakteristischen Größen verwendet:

$$\text{Länge: } \lambda_{\text{Dif}}, \quad (35)$$

$$\text{Dichte: } n_0, \quad (36)$$

$$\text{Elektronenstromdichte: } D_e n_0 / \lambda_{\text{Dif}}, \quad (37)$$

$$\text{Ionenstromdichte: } D_i n_0 / \lambda_{\text{Dif}} \cdot T_e / T_i, \quad (38)$$

$$\text{elektrische Stromdichte: } e D_e n_0 / \lambda_{\text{Dif}}, \quad (39)$$

$$\text{Potential: } k T_e / e, \quad (40)$$

$$\text{elektrisches Feld: } k T_e / e \lambda_{\text{Dif}}, \quad (41)$$

$$\text{Ionisationsrate: } A_{\text{Ion}0} \quad (42)$$

und die folgenden Abkürzungen:

$$t = T_i / T_e, \quad (43)$$

$$d = D_i / D_e, \quad (44)$$

$$d_e = D_e / D_{\text{am}} = \frac{d+t}{d(1+t)}, \quad (45)$$

$$d_i = D_i / D_{\text{am}} = \frac{d+t}{1+t}, \quad (46)$$

$$l_{e,i} = \lambda_{e,i} / \lambda_{\text{Dif}}, \quad (47)$$

$$l_D = \lambda_D / \lambda_{\text{Dif}}, \quad (48)$$

$$l_{\text{Ion}} = \lambda_{\text{Ion}} / \lambda_{\text{Dif}}, \quad (49)$$

$$a = 0,343 l_i / t. \quad (50)$$

Für beide Trägersorten benutzen wir die Einstein-Beziehung  $D/b = k T/e$ .

Die normierten Gln. (29) – (34) stellen ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem sechster Ordnung für die unbekannten Ortsfunktionen  $n_e$ ,  $n_i$ ,  $T_e$ ,  $T_i$ ,  $E$ ,  $U$  dar. Die sechs Integrationskonstanten können durch folgende Maßnahmen festgelegt werden:

1. Vorgabe eines Stromes bzw. einer Stromdichte; an der plasmaseitigen Begrenzung der Schicht:

2. Vorgabe der Dichte,

3. Vorgabe des Potentials,

4. Forderung der Quasineutralität;

an der wandseitigen Begrenzung der Schicht:

5. Vorgabe des Ionenstroms,

6. Vorgabe des Elektronenstroms.

Die Ströme an der Wand werden durch die Wandbedingung (27) gegeben.

## 5. Anwendung auf die Kugelsonde

### 5.1. Gleichungssystem

Wir wenden das Gleichungssystem (29 n) – (34 n) auf die Grenzschicht um eine Kugelsonde an und vernachlässigen die Ionisations- und Rekombinationsprozesse. Dieses Modell wird in der Literatur am häufigsten behandelt und eignet sich deshalb am besten zum Vergleich der Resultate. Der Übergang zu einer anderen Geometrie und die Berücksichtigung von Ionisation und Rekombination birgt keine neuen Probleme in sich.

$$\text{Wir setzen } \varepsilon = 2 \quad (51)$$

$$\text{und } A_{\text{Ion}} = A_{\text{Rec}} = 0 \quad (52)$$

in das Gleichungssystem ein und führen statt der Radialkoordinate die Größe

$$\varrho = 1/r \quad (53 \text{ n})$$

und statt des elektrischen Feldes die Größe

$$F = -r^2 E \quad (54 \text{ n})$$

ein. Wegen (52) lassen sich die Kontinuitätsgleichungen (31 n) und (32 n) unmittelbar integrieren. Wir erhalten so die konstanten Teilchenströme

$$J_e = r^2 T_e \quad (55 \text{ n})$$

$$J_i = r^2 T_i \quad (56 \text{ n})$$

Unter Verwendung dieser neuen Größen lautet das Gleichungssystem:

$$n_e F + \frac{dn_e}{d\varrho} = J_e + \left( n_{e2} F + \frac{dn_{e2}}{d\varrho} - J_{e2} \right), \quad (57 \text{ n})$$

$$- \frac{n_i F}{\sqrt{1+a\varrho^2|F|}} + t \frac{dn_i}{d\varrho} = J_i + \left( - \frac{n_{i2} F}{\sqrt{1+a\varrho^2|F|}} + t \frac{dn_{i2}}{d\varrho} - J_{i2} \right), \quad (58 \text{ n})$$

$$l_D^2 \varrho^4 \cdot dF/d\varrho = n_i - n_e, \quad dU/d\varrho = -F. \quad (59 \text{ n}, 60 \text{ n})$$

Aus den Gln. (24), (25) finden wir für die Korrekturgrößen:

$$n_{e2}(\varrho) = -\frac{1-\delta_e}{1+\delta_e} n_{eW} \exp \left\{ -\frac{1}{l_e} \left( \frac{1}{\varrho} - 1 \right) \right\} \exp \{ U - U_W \} \{ 1 - \Phi(\sqrt{U - U_W}) \}, \quad (61 \text{ n})$$

$$n_{i2}(\varrho) = -\frac{1-\delta_i}{1+\delta_i} n_{iW} \exp \left\{ -\frac{1}{l_i} \left( \frac{1}{\varrho} - 1 \right) \right\}, \quad (62 \text{ n})$$

$$J_{e2}(\varrho) = -\frac{1-\delta_e}{1+\delta_e} \frac{n_{eW}}{\varrho^2} \frac{4}{\pi} \frac{1}{l_e} \exp \left\{ -\frac{1}{l_e} \left( \frac{1}{\varrho} - 1 \right) \right\}, \quad (63 \text{ n})$$

$$J_{i2}(\varrho) = -\frac{1-\delta_i}{1+\delta_i} \frac{n_{iW}}{\varrho^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{0,66} \frac{t}{l_i} \exp \left\{ -\frac{1}{l_i} \left( \frac{1}{\varrho} - 1 \right) \right\}. \quad (64 \text{ n})$$

Wir müssen noch die Randbedingungen entsprechend unseren Überlegungen auf S. 531 festlegen.

Durch Vorgabe des elektrischen Stromes

$$I = (d/t) J_i - J_e \quad (65 \text{ n})$$

zur Kugelsonde legen wir eine Randbedingung fest.

An der Stelle  $\varrho = 0$ , der Grenze Plasma – Schicht, soll die quasineutrale Dichte der Ladungsträger gleich derjenigen im Plasma sein

$$n = n_0 \quad (66)$$

und das Potential verschwinden

$$U = 0. \quad (67 \text{ n})$$

Zur Erfüllung der Forderung nach Quasineutralität verlangen wir, daß mit  $\varrho \rightarrow 0$  die Lösung unseres Gleichungssystems übergeht in die quasineutrale Lösung (s. auch COHEN<sup>6</sup> und SU und LAM<sup>7</sup>)

$$n = 1 - \varrho/\varrho_s, \quad (68 \text{ n})$$

$$dF/d\varrho = F^2/(F_0 \varrho_s), \quad (69 \text{ n})$$

$$F = F_0/n, \quad (70 \text{ n})$$

$$U = F_0 \varrho_s \ln n. \quad (71 \text{ n})$$

Hierbei haben wir die Konstanten

$$F_0 = \frac{t J_e - J_i}{1+t} \quad (72 \text{ n})$$

und

$$\varrho_s = -\frac{1+t}{J_e + J_i} \quad (73 \text{ n})$$

eingeführt.

Aus der Gl. (27) erhalten wir mit Hilfe der Beziehungen (55 n), (56 n) und (63 n), (64 n) die beiden Wandbedingungen

$$J_e = -\frac{1-\delta_e}{1+\delta_e} \frac{4}{\pi} n_{eW} \frac{1}{l_e}, \quad (74 \text{ n})$$

$$J_i = -\frac{1-\delta_i}{1+\delta_i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{0,66} n_{iW} \frac{t}{l_i}. \quad (75 \text{ n})$$

Bei hohen Feldern kann die Ionendiffusion gegenüber der Ionendrift vernachlässigt werden. Hier-

durch reduziert sich das Differentialgleichungssystem (57 n) – (60 n) um eine Ordnung. Die Wandbedingung (75) für die Ionen verliert dann ihre Bedeutung und entfällt.

## 5.2. Numerische Integration

Das Differentialgleichungssystem (57 n) – (64 n) kann nur numerisch gelöst werden. Für kleine Werte von  $\varrho$  bis zur Stelle  $\varrho = \varrho_R$  verwenden wir die quasineutrale Lösung (68 n) – (71 n). Mit den so berechneten Werten von  $n$ ,  $F$ ,  $U$  als Anfangsbedingung starten wir eine numerische Integration unter Berücksichtigung der Aufspaltung von Elektronen- und Ionendichte. Hierzu setzen wir

$$n_i(\varrho_R) = n(\varrho_R) \quad (76 \text{ n})$$

und berechnen  $n_e(\varrho_R)$  unter Verwendung der Poisson-Gleichung (59 n). Diese Bestimmung der Ladungsträgerdichten bei vorgegebener Raumladung an der Stelle  $\varrho_R$  verursacht einen Fehler von der Größenordnung  $n_i(\varrho_R) - n_e(\varrho_R)$ , der bei genügend kleinen Werten von  $\varrho_R$  jedoch beliebig klein wird.

Mit diesen Anfangsbedingungen für  $F$ ,  $U$ ,  $n_e$ ,  $n_i$  können wir bis zur Stelle  $\varrho = 1$  an der Wand integrieren und müssen dann versuchen, durch Iteration die Wandbedingungen (74 n), (75 n) zu erfüllen. Hierzu haben wir noch eine der beiden Stromdichten  $J_e$ ,  $J_i$ , die in  $F_0$  und  $\varrho_s$  eingehen, zur freien Wahl zur Verfügung; die andere Stromdichte wird durch den vorgegebenen Gesamtstrom  $I$  bestimmt. Außerdem haben wir noch einen weiteren freien Parameter, der folgendermaßen in unsere Rechnung eingeht.

Wir betrachten die Bewegungsgleichung (58 n) der Ionen für den einfachen Fall verschwindender  $f_2$ -Teilchen und schwacher Felder ( $a = 0$ ). Diese Situation ist gegeben in der Nähe des ungestörten Plasmas. Die vereinfachte Bewegungsgleichung stellt eine homogene lineare Differentialgleichung dar,



deren allgemeine Lösung sich zusammensetzt aus einer partikulären Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung für verschwindenden Ionenstrom  $J_i$ . Die Lösung der homogenen Gleichung

$$n_i = A \exp\{-U/t\} \quad (77 \text{ n})$$

wächst vom Plasma her zur Wand hin exponentiell an.

Wir haben damit folgende Situation. Eine quasineutrale Lösung, die bestimmt wird durch einen vorgegebenen Satz von Anfangsbedingungen, fächert zur Wand hin auf in eine Mannigfaltigkeit von Lösungen, die sich in der Konstante  $A$  der homogenen Lösung (77) unterscheiden. Diese Auffächerung der quasineutralen Lösung für  $n_i$  bringt bei der numerischen Integration folgendes Problem mit sich:

Wir integrieren in Richtung der Auffächerung. Es entsteht eine Instabilität, kleine Änderungen der Funktionswerte können die Lösungskurve für  $n_i$  ins Unendliche wachsen lassen. SU und LAM<sup>7</sup> haben aus diesem Grunde den Ionendifusionsstrom überhaupt vernachlässigt. Wir werden das Problem folgendermaßen umgehen. Immer, wenn die Diffusion der Ionen sehr gering ist im Vergleich zur Drift und daher diese Instabilitäten auftreten können, wollen wir den Diffusionsterm als schwache Störung der Bewegungsgleichung ohne Diffusion berücksichtigen. Anschließend überlagern wir eine solche homogene Lösung der Differentialgleichung, daß die Ionen-Wandbedingung (75 n) erfüllt wird.

## 6. Ergebnisse und Diskussion

In der Einleitung haben wir in einem Parameterdiagramm die Grenzen der makroskopischen Modelle „Fall hoher Trägerdichte“ und „Kontinuumsfall“ beschrieben. Für einige charakteristische Punkte dieses Parameterdiagramms haben wir jetzt an Hand unseres Modells Dichteverteilung und Potentialverteilung berechnet und die sich ergebenden Einzelbilder in das Parameterdiagramm eingezeichnet. Für die Rechnung legten wir zugrunde das Gas Helium mit

Ionentemperatur

$$k T_i / e_i = 0,05 \text{ eV}, \quad (78)$$

mittlere freie Weglänge der Ionen \*

$$\lambda_i p = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Torr cm}, \quad (79)$$

Beweglichkeit der Elektronen

$$b_e p = 10^6 \text{ Torr cm}^2/\text{V sec}. \quad (80)$$

Die mittlere freie Weglänge  $\lambda_e$  der Elektronen verknüpfen wir mit der Beweglichkeit

$$b_e p = e \lambda_e p / m_e v_{e \text{ th}}, \quad (81)$$

wobei die thermische Geschwindigkeit durch Gl. (6) definiert ist.

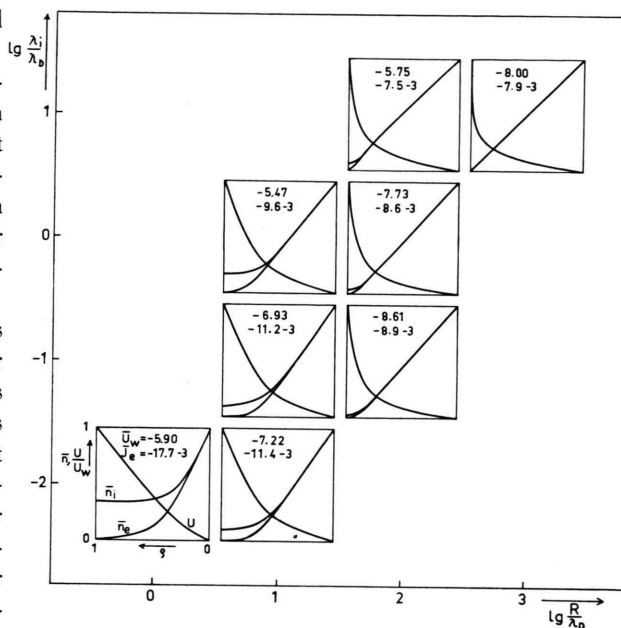


Abb. 2. Dichte- und Potentialverteilungen  $n=n/n_0$  und  $\bar{U}=e U_W/k T_e$  als Funktion von  $q=R/r$  für verschiedene Punkte im Parameterdiagramm am Beispiel einer kugelsymmetrischen Schicht ohne Ionisation und Rekombination. In jedem Einzelbild sind das Wandpotential  $\bar{U}_W=e U_W/k T_e$  und der Elektronenstrom  $J_e=J_e R/D_e n_0$  angegeben. Die Zahl  $-3$  hinter dem Stromwert steht für den Faktor  $10^{-3}$ .

Parameter:  $I=0$ ;  $t=0,1$ .

Für die Kurven der Abb. 2 nehmen wir vollständige Absorption der Ladungsträger an der Wand an:

$$\delta_e = \delta_i = 0, \quad (82)$$

verschwindenden Gesamtstrom:

$$I = 0 \quad (83)$$

und ein Temperaturverhältnis

$$t = T_i/T_e = 0,1. \quad (84)$$

Wir treffen für die folgende Diskussion die Vereinbarung, die Einzelbilder durch ihre Koordinaten

\*  $\lambda_i$  stellt die mittlere freie Weglänge für Impulstransport dar, berechnet im Schwerpunktsystem. Für Ladungsaustausch ist sie halb so groß wie die mittlere freie Weglänge, die sich aus dem totalen Stoßquerschnitt errechnet.

im  $\lg R/\lambda_D - \lg \lambda_i/\lambda_D$ -Koordinatensystem zu kennzeichnen.

Bei konstanter freier Weglänge  $\lambda_i$  und konstantem Sondenradius  $R$  erfolgt der Übergang  $\lambda_D \rightarrow 0$  zum Fall hoher Trägerdichte auf einer Parallelen zur Winkelhalbierenden von links unten nach rechts oben. In der Folge der Einzelbilder (0, -2), (1, -1), (2, 0), (3, 1) finden wir einen Übergang von einer ausgedehnten Raumladungszone und einem Potentialverlauf, wie er für den Fall hoher Trägerdichte charakteristisch ist.

Der Übergang  $\lambda_i \rightarrow 0$  zum Kontinuumsfall verläuft für konstante Debye-Länge  $\lambda_D$  und konstanten Sondenradius  $R$  auf Parallelen zur Ordinate von oben nach unten. In der entsprechenden Einzelbildfolge (2, 1), (2, 0), (2, -1) ändern sich Potential- und Dichteverteilung nur wenig. Allerdings nehmen die Werte der Elektronen- und Ionendichte an der Wand ab, so daß die makroskopischen Wandbedingungen (10), (11) verschwindender Dichte immer mehr an Gültigkeit gewinnen.

### 6.1. Vergleich mit den Rechnungen von WAYMOUTH

WAYMOUTH<sup>8</sup> berechnet den „Fall hoher Trägerdichte“ und verwendete die makroskopischen Wandbedingungen (4) und (6) für Ionen und Elektronen mit

$$\alpha_i = 1, \quad \alpha_e = 1. \quad (85, 86)$$

Der Einfluß der Raumladung wird in diesem Modell durch einen Potentialsprung an der Wand berücksichtigt, die Debye-Länge tritt also in den Gleichungen nicht auf. Für alle Punkte auf einer Parallelen zur Winkelhalbierenden liefert diese Rechnung nur eine Lösung.

In den Abb. 3 bis 6 stellen wir unsere Ergebnisse der Schichtberechnung dem Ergebnis, das nach WAYMOUTH berechnet wurde, gegenüber. Hierbei verwendeten wir

$$\lambda_i/R = 10^{-2}. \quad (87)$$

Sowohl beim Dichte- und Potentialverlauf (Abb. 3 und 4) als auch bei den Strom-Spannungs-Charakteristiken (Abb. 5 und 6) strebt die Folge unserer Lösungskurven mit abnehmenden Werten von  $\lambda_D$  auf die makroskopische Näherung von WAYMOUTH zu. Der geringe Unterschied zwischen unseren Lösungskurven (3, 1) und denen von WAYMOUTH (W) bei der Dichte- und Potentialverteilung rührt von der diskontinuierlichen Beschreibung der Raumladungszone bei WAYMOUTH her.

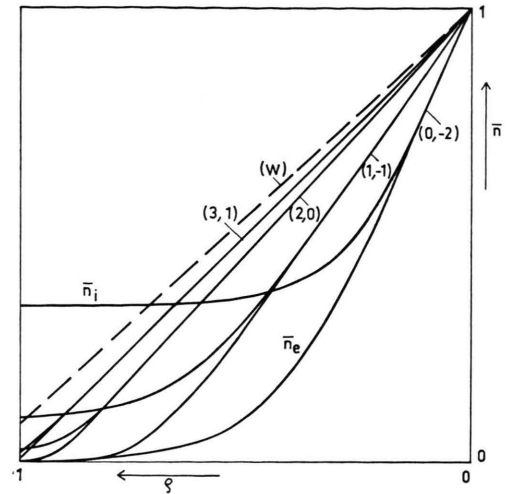


Abb. 3. Dichte  $n = n/n_0$  als Funktion von  $q = R/r$  für die Parameter  $(\lg(R/\lambda_D), \lg(\lambda_i/\lambda_D)) = (0, -2), (1, -1), (2, 0), (3, 1)$  im Vergleich zur Dichteverteilung (W) von WAYMOUTH. Parameter:  $I=0, t=0,1$ .

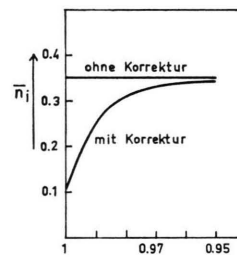


Abb. 3 a. Vergrößerter Ausschnitt der Ionen-Dichteverteilung (0, -2); obere Kurve:  $n_i$  ohne  $f_{i2}$ -Korrektur, untere Kurve:  $n_i$  mit  $f_{i2}$ -Korrektur.

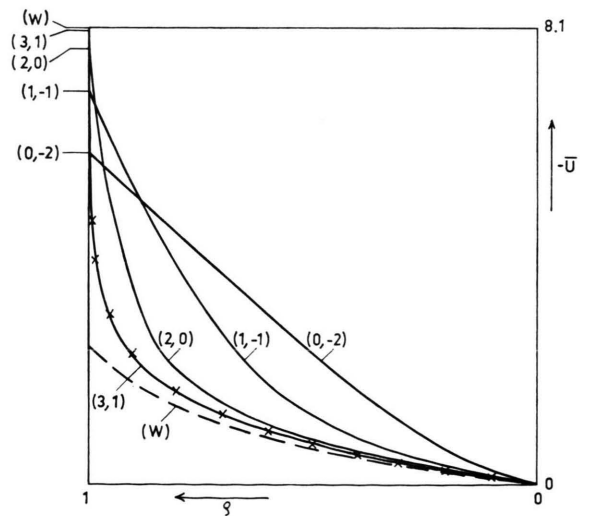


Abb. 4. Potential  $\bar{U} = e U/k T_e$  als Funktion von  $q = R/r$  für die Parameter  $(\lg(R/\lambda_D), \lg(\lambda_i/\lambda_D)) = (0, -2), (1, -1), (2, 0), (3, 1)$  im Vergleich zur Potentialverteilung (W) von WAYMOUTH. Die Symbole XX geben die Lösung des Schottky'schen Grenzfalles  $\lambda \rightarrow 0$  wieder. Parameter:  $I=0; t=0,1$ .

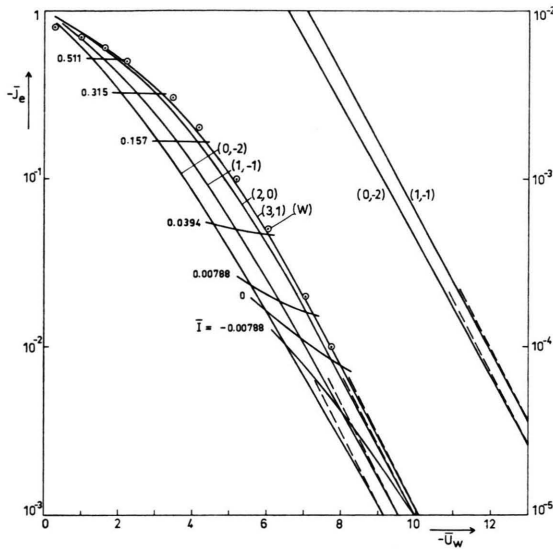


Abb. 5. Elektronenstrom-Spannungscharakteristiken für die Parameter  $(\lg(R/\lambda_D), \lg(\lambda_i/\lambda_D)) = (0, -2), (1, -1), (2, 0), (3, 1)$  im Vergleich zur Charakteristik (W) von WAYMOUTH, die nur durch einige Punkte  $\odot$  angedeutet ist. Ferner sind die Kurven konstanter  $I$ -Werte eingezeichnet. Die gestrichelten Geraden stellen die Boltzmann-Geraden dar. Parameter:  $t=0,1$ .

In unserer Elektronenstrom-Spannungscharakteristik haben wir die Geraden eingezeichnet, die sich für eine Boltzmann-Verteilung der Elektronendichte

$$n_e \sim \exp\{eU/kT_e\} \quad (88)$$

ergeben würden. Wir sehen, daß diese Geraden nur für sehr kleine Elektronenströme mit der Charakteristik übereinstimmen, und zwar müssen die Elektronenströme um so kleiner sein, je kleiner der Parameter  $\lambda_i/\lambda_D$  ist.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß sich das Grenzschnittmodell „Fall hoher Trägerdichte“ näherungsweise als Grenzfall unseres allgemeinen Schichtmodells erwiesen hat, wenn die Debye-Länge  $\lambda_D$  nur genügend klein ist.

## 6.2. Vergleich mit den Rechnungen von COHEN und SU, LAM

Zu den Modellen von COHEN<sup>6</sup> und SU, LAM<sup>7</sup> gelangen wir durch den Grenzübergang  $\lambda_{e,i} \rightarrow 0$ . Dies führt zu den makroskopischen Wandbedingungen (10), (11) verschwindender Dichte. Diese Modelle enthalten dementsprechend die mittlere freie Weglänge der Ladungsträger nicht. Für alle Parameter auf einer ordinatorparallelen Geraden im Parameterdiagramm der Abb. 2 ergeben diese Rechnungen da-

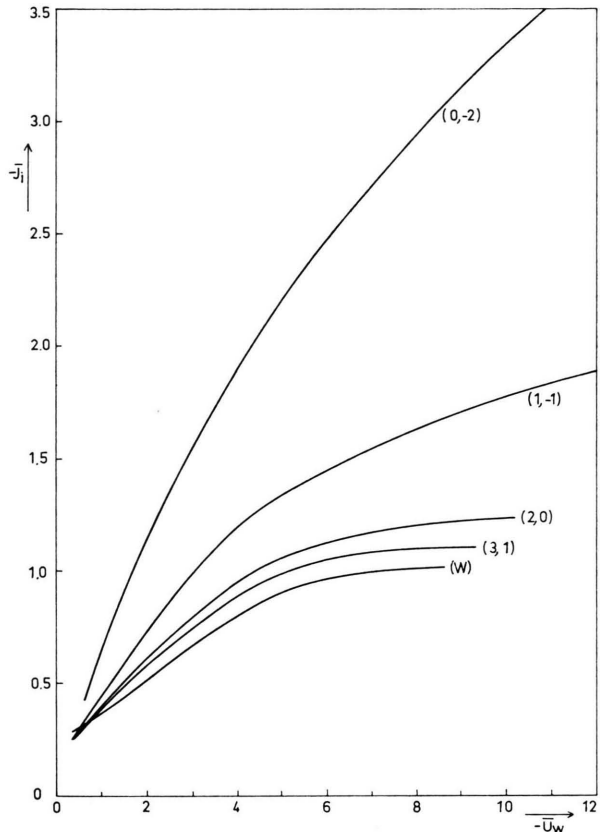


Abb. 6. Ionenstrom-Spannungscharakteristik für die Parameter  $(\lg(R/\lambda_D), \lg(\lambda_i/\lambda_D)) = (0, -2), (1, -1), (2, 0), (3, 1)$  im Vergleich zur Charakteristik (W) von WAYMOUTH. Parameter:  $t=0,1$ .

her nur eine Lösung. In einer neueren Arbeit verwenden BLUE und INGOLD<sup>18</sup> an Stelle der Wandbedingung (10), (11) verschwindender Dichte die Wandbedingung (4) und (7) mit

$$\alpha_e = 2, \quad \alpha_i = 2. \quad (89), (90)$$

In diesem Fall tritt eine Abhängigkeit der Schichtberechnung von der freien Weglänge auf\*\*.

In den Abb. 7 bis 9 stellen wir unsere Ergebnisse der Schichtberechnung für verschiedene Werte des Parameters  $\lambda_i/\lambda_D$  dem Ergebnis von SU und LAM gegenüber. Wir wählen

$$\lg R/\lambda_D = 2. \quad (91)$$

\*\* FETTE und HESSE (vorangehende Arbeit, S. 518–524) berechnen vereinfacht den Kontinuumsfall durch Einführung der Modellzonen: ungestörtes Plasma, (quasineutrales) Übergangsgebiet und (Raumladungs-)Schicht. Die Grenze Übergangsgebiet–Schicht wird durch eine sogen. Mindestfeldstärke festgelegt, die als charakteristische Feldstärke der Schicht (s. WAHLE und MÜLLER<sup>12</sup>) angesehen werden kann.

Wie die Abb. 2 zeigt, ändern sich die Dichteverteilungen mit abnehmender freier Weglänge nur unwesentlich. Wir haben daher diese Dichteverteilungen nicht mehr getrennt aufgezeichnet. Bei den zugehörigen Potentialverteilungen ändert sich das Wandpotential  $U_W$  beträchtlich. Wir stellen fest, daß die Folge unserer Kurven mit abnehmenden Werten von  $\lambda_i/\lambda_D$  auf die Kurven von SU und LAM (SL) zustreben. Die Übereinstimmung zwischen (2, -1) und (SL) ist nicht besonders gut. Wir führen dies auf die Annahme der Boltzmann-Verteilung der Elektronen bei SU und LAM zurück.

Auch bei den Elektronenstrom-Spannungscharakteristiken finden wir mit abnehmender freier Weglänge eine Annäherung an die Charakteristiken von COHEN (C) und SU und LAM (SL). Die gestrichelten Ge-

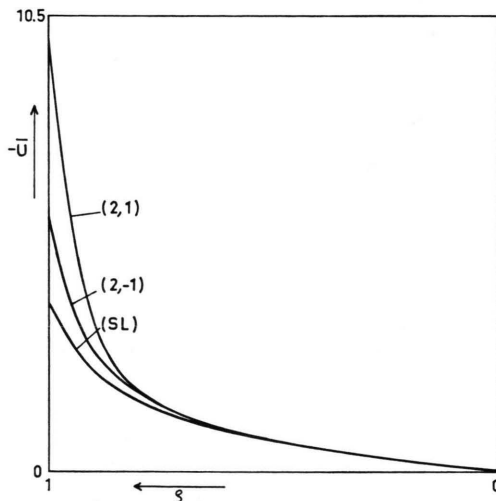


Abb. 7. Potential  $\bar{U} = e U / k T_e$  als Funktion von  $q = R/r$  für die Parameter  $(\lg(R/\lambda_D), \lg(\lambda_i/\lambda_D)) = (2, 1), (2, -1)$  im Vergleich zur Potentialverteilung (SL) von SU und LAM. Parameter:  $J_i = -1, 10$ ;  $t = 0, 1$ .

raden stellen Charakteristiken dar, die sich für eine Boltzmann-Verteilung der Elektronen ergeben. Wie im Fall hoher Trägerdichte ist die Übereinstimmung dieser Charakteristiken mit den Charakteristiken unseres Modells um so besser, je größer der Parameter  $\lambda_i/\lambda_D$  ist.

Die Charakteristik (C) erweist sich als eine brauchbare Näherung für Charakteristiken mit  $\lambda_i/\lambda_D < 10^{-1}$ . Deutlich treten die Abweichungen der SU-LAM-Charakteristik für höhere Elektronenströme in Erscheinung, die auf die Annahme einer Boltzmann-Verteilung der Elektronen zurückzuführen sind. Entspre-

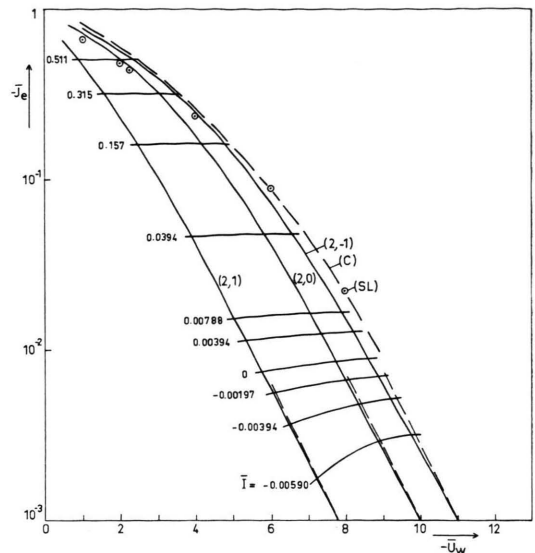


Abb. 8. Elektronenstrom-Spannungscharakteristik für die Parameter  $(\lg(R/\lambda_D), \lg(\lambda_i/\lambda_D)) = (2, 1), (2, 0), (2, -1)$  im Vergleich zu den Charakteristiken (C) und (SL) von COHEN bzw. SU und LAM. Die Charakteristik (SL) ist durch einige Punkte mit dem Symbol  $\odot$  gekennzeichnet. Ferner sind die Kurven konstanter  $I$ -Werte eingezeichnet. Die gestrichelten Geraden stellen die Boltzmann-Geraden dar. Parameter:  $t = 0, 1$ .

chende Abweichungen zeigen sich auch bei der Ionenstrom-Spannungscharakteristik der Abb. 9.

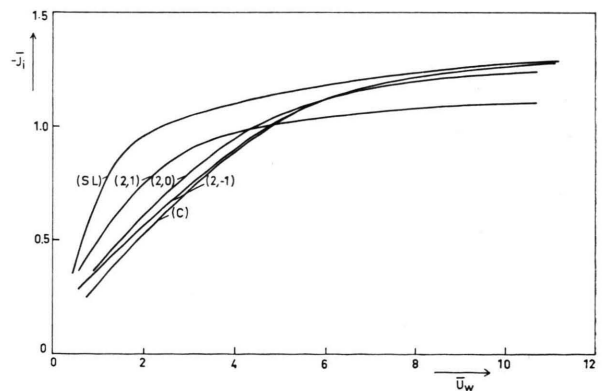


Abb. 9. Ionenstrom-Spannungscharakteristik für die Parameter  $(\lg(R/\lambda_D), \lg(\lambda_i/\lambda_D)) = (2, 1), (2, 0), (2, -1)$  im Vergleich zu den Charakteristiken (C) und (SL) von COHEN bzw. SU und LAM. Parameter:  $t = 0, 1$ .

Zusammenfassend können wir feststellen, daß sich die Modelle von COHEN und SU, LAM als Grenzfälle unseres Schichtmodells ergeben haben, wobei die Rechnungen von SU, LAM wegen der Annahme der Boltzmann-Verteilung der Elektronen nur für sehr hohe negative Wandpotentiale richtige Ergebnisse liefern.



### 6.3. Einfluß der Elektronenreflexion

In Abb. 10 ist die Abhängigkeit der Elektronenstrom-Spannungscharakteristik von der Elektronenreflexion am Beispiel der Parameter

$$(\lg(R/\lambda_D), \lg(\lambda_i/\lambda_D)) = (2, 0)$$

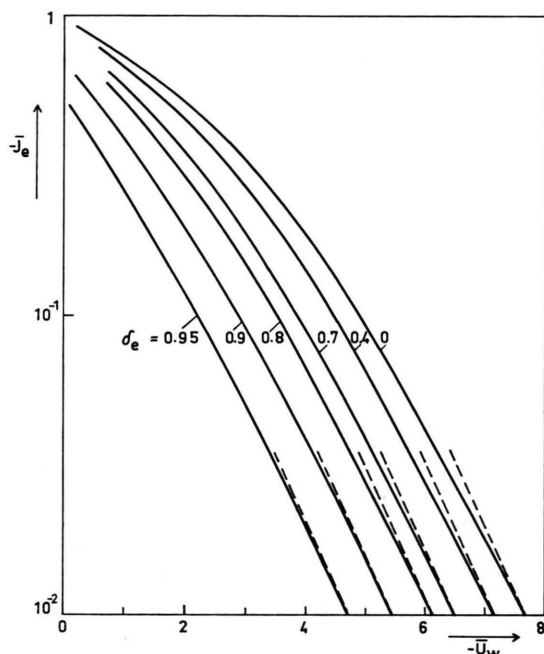


Abb. 10. Einfluß der Elektronenreflexion (Reflexionskoeffizient  $\delta_e$ ) auf die Elektronenstrom-Spannungscharakteristik. Die gestrichelten Geraden stellen die Boltzmann-Geraden dar.

Parameter:  $(\lg(R/\lambda_D), \lg(\lambda_i/\lambda_D)) = (2, 0)$ ;  $t = 0,1$ .

wiedergegeben. Durch die Aufspaltung der Geschwindigkeitsverteilungen in  $f_1$  und  $f_2$  ist es in unserem

Modell möglich, die elastische Reflexion exakt zu berücksichtigen. Die Reflexion tritt in der Form eines Faktors  $(1 - \delta_e)/(1 + \delta_e)$  in der Wandbedingung (74) und dem Korrekturterm der Bewegungsgleichung (57) auf. An die Charakteristiken in Abb. 10 haben wir wieder die gestrichelten Geraden eingezeichnet, die einer Boltzmann-Verteilung der Elektronen entsprechen. Erwartungsgemäß stimmen diese Geraden mit den Charakteristiken um so besser überein, je größer der Reflexionskoeffizient ist. Starke Reflexion bedeutet nämlich eine nur schwache Störung der isotropen Geschwindigkeitsverteilung, und Isotropie ist Voraussetzung für die Gültigkeit der Boltzmann-Verteilung.

In den bisher vorliegenden makroskopischen Modellen wird die Elektronenreflexion nur von DAVYDOV und ZMANOVSKAJA<sup>4</sup> in den makroskopischen Wandbedingungen berücksichtigt.

Auf eine Untersuchung der Ionenreflexion verzichten wir hier.

### 6.4. Einfluß der $f_2$ -Korrektur

Bei der numerischen Integration ergab sich, daß der Einfluß der  $f_2$ -Teilchen bei den Ionen nur die Ionendichte unmittelbar vor der Wand verändert (s. Abb. 3 a), die übrigen Größen der Schicht bleiben ohne Einfluß. Schon SU und LAM<sup>7</sup> stellten fest, daß der genaue Verlauf der Ionendichte unmittelbar vor der Wand ohne Einfluß ist auf die übrigen Größen der Schicht.

Die Elektronenkorrektur führt zur Wandbedingung (74). Durch diese Wandbedingung und den Gesamtstrom werden bei einer Integration mit vorgegebener

$(\lg \frac{R}{\lambda_D}, \lg \frac{\lambda_i}{\lambda_D})$	$-\bar{J}_i$	$-\bar{J}_e$	$n_{eW}$	$n_{iW}$	$-E_W$	$-U_W$	$\alpha_e$
(3, 1)	$7,89 \cdot 10^{-3}$	1,09	$1,67 \cdot 10^{-4}$ $3,00 \cdot 10^{-4}$	$9,43 \cdot 10^{-3}$ $9,43 \cdot 10^{-3}$	270,0 270,0	8,00 8,01	1,11
(2, 1)	$7,45 \cdot 10^{-3}$	1,03	$1,60 \cdot 10^{-3}$ $2,90 \cdot 10^{-3}$	$5,63 \cdot 10^{-2}$ $5,63 \cdot 10^{-2}$	60,2 60,4	5,75 5,78	1,09
(2, 0)	$8,57 \cdot 10^{-3}$	1,19	$1,85 \cdot 10^{-4}$ $2,69 \cdot 10^{-4}$	$2,82 \cdot 10^{-2}$ $2,82 \cdot 10^{-2}$	59,3 59,3	7,73 7,73	1,35
(1, 0)	$9,60 \cdot 10^{-3}$	1,33	$2,03 \cdot 10^{-3}$ $3,44 \cdot 10^{-3}$	$1,66 \cdot 10^{-1}$ $1,66 \cdot 10^{-1}$	15,2 15,2	5,47 5,48	1,18
(2, -1)	$8,85 \cdot 10^{-3}$	1,23	$1,87 \cdot 10^{-5}$ $1,69 \cdot 10^{-5}$	$2,15 \cdot 10^{-2}$ $2,15 \cdot 10^{-2}$	59,6 59,6	8,61 8,61	2,22
(1, -1)	$1,12 \cdot 10^{-2}$	1,55	$2,39 \cdot 10^{-4}$ $2,63 \cdot 10^{-4}$	$1,04 \cdot 10^{-1}$ $1,04 \cdot 10^{-1}$	16,8 16,8	6,93 6,93	1,80
(1, -2)	$1,14 \cdot 10^{-2}$	1,58	$2,51 \cdot 10^{-5}$ $2,07 \cdot 10^{-5}$	$9,38 \cdot 10^{-2}$ $9,38 \cdot 10^{-2}$	17,1 17,1	7,22 7,22	2,34
(0, -2)	$1,77 \cdot 10^{-2}$	2,45	$3,94 \cdot 10^{-4}$ $3,51 \cdot 10^{-4}$	$3,48 \cdot 10^{-1}$ $3,48 \cdot 10^{-1}$	7,5 7,5	5,90 5,90	2,13

Tab. 1. Vergleich einiger Plasmaeigenschaften an der Wand, berechnet aus dem mikroskopischen Modell (jeweils obere Reihe) und dem makroskopischen Modell mit angepaßten Werten von  $J_e$ ,  $J_i$  bzw.  $\alpha_e$  (untere Reihe).

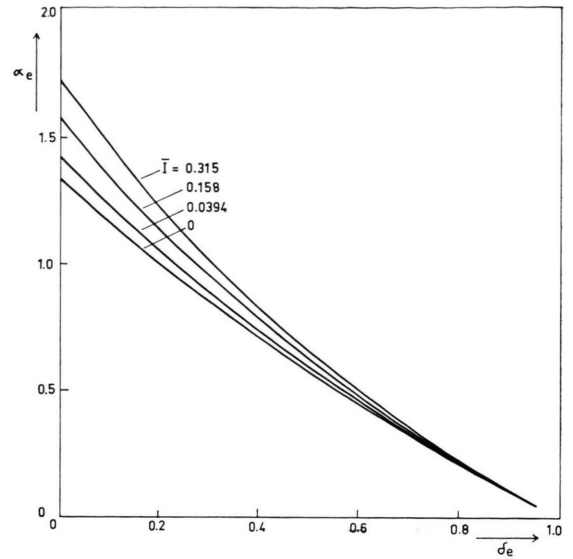
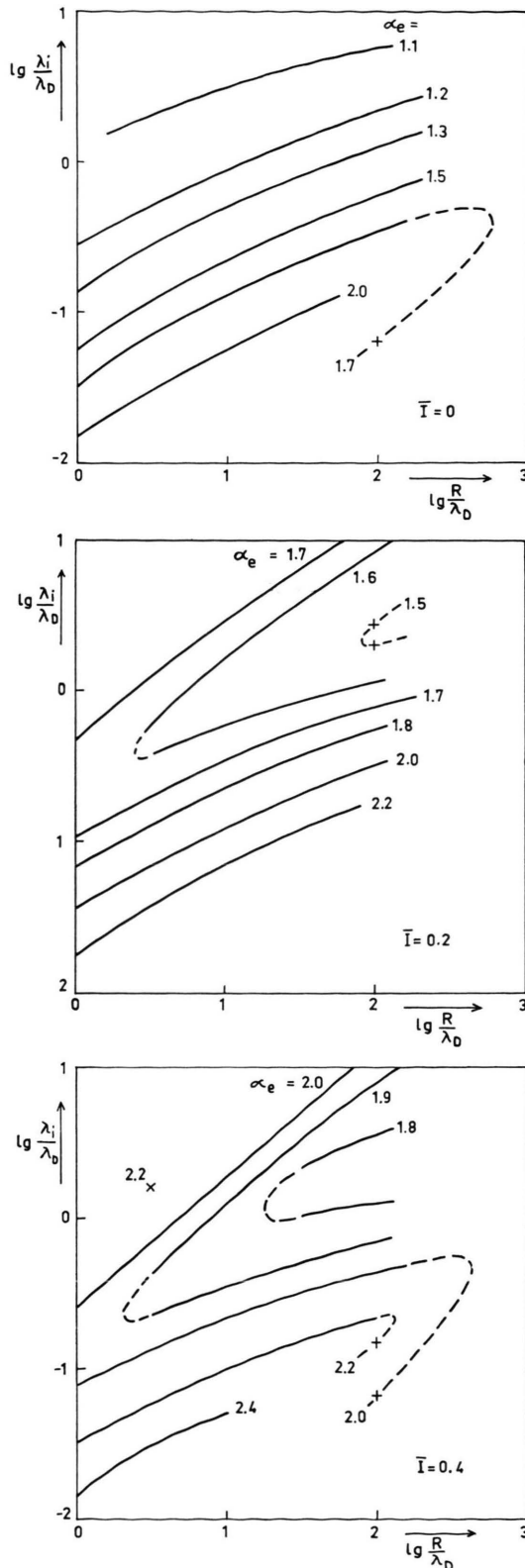


Abb. 12. Berechneter  $\alpha_e$ -Koeffizient als Funktion des Reflexionskoeffizienten  $\delta_e$  für verschiedene Gesamtströme  $I$ . Parameter:  $(\lg(R/\lambda_D), \lg(\lambda_i/\lambda_D)) = (2, 0)$ ;  $t = 0,1$ .

Anfangsbedingung der Elektronenstrom  $J_e$  und der Ionenstrom  $J_i$  festgelegt. Wir haben mit den so ermittelten Werten von  $J_e$ ,  $J_i$  eine vereinfachte Rechnung unter Vernachlässigung von  $f_2$  durchgeführt und die Ergebnisse mit den Resultaten der exakten Rechnung verglichen (s. Tab. 1). Es zeigt sich eine recht gute Übereinstimmung zwischen diesen beiden Rechnungen. Damit lassen sich also die Ergebnisse unseres mikroskopischen Modells reproduzieren mit Hilfe einer makroskopischen Berechnung bei vorgegebenem Wertepaar  $J_e$ ,  $J_i$ . Dieses Wertepaar muß natürlich vorher aus der mikroskopischen Theorie ermittelt werden. Wir können jedoch dieses Wertepaar auch ersetzen durch den Gesamtstrom  $I$  und den Koeffizienten  $\alpha_e$  der Wandbedingung für die Elektronen. Den Einfluß der verschiedenen Parameter auf diesen Anpassungskoeffizienten  $\alpha_e$  zeigen die Abb. 11 – 14. Es zeigt sich, daß die  $\alpha_e$ -Werte im wesentlichen zwischen 1 und 2 liegen. Weiter sehen wir, daß sich die beiden Fälle der halben und vollen Maxwell-Verteilung, wie sie durch Gln. (8) und (9) charakterisiert sind, als Spezialfälle unseres Modells ergeben.

Abb. 11. Kurven konstanter Werte des berechneten  $\alpha_e$ -Koeffizienten. Der gestrichelte Teil einzelner Kurven gibt den vermutlichen Kurvenverlauf an. Parameter:  $t = 0,1$ ; a)  $\bar{I} = 0$ ; b)  $\bar{I} = 0,2$ ; c)  $\bar{I} = 0,4$ .